7.　恒真命題・恒偽命題

1.　恒真・恒偽・偶然的

それ以上分割できない命題が「要素命題」，要素命題から「否定」「連言」「選言」「条件文」「双条件文」の論理演算で作られた命題が「複合命題」である。複合命題は，命題記号と論理記号を使って，論理式で表現できる。

複合命題の真偽は，要素命題の真偽によって，真になる場合もあれば，偽になる場合もある。

例えば，次の選言は，A，B の真偽によって，真にも偽にもなる。

$$A \lor B$$

しかし，次の選言は，A の真偽にかかわらず，常に真である。

$$A \lor \sim A$$

あるいは，次の連言は，A の真偽にかかわらず，常に偽である。

$$A \land \sim A$$

一般に，要素命題の真偽にかかわらず，常に真となる複合命題を「恒真命題」，常に偽となる複合命題を「恒偽命題」と呼ぶ。また，恒真命題でも恒偽命題でもない複合命題は，「偶然的命題」と呼ぶ。

恒真命題は，「トートロジー（tautology）」と呼ぶこともある。偶然的命題は，要素命題の真偽によって，真にも偽にもなる命題である。複合命題が恒真命題であるとき，単に「命題は恒真である」という言い方をする。他も同様である。

以上により，複合命題は次の 3 種類に分類される。

恒真命題（トートロジー）	常に真になる複合命題
恒偽命題	常に偽になる複合命題
偶然的命題	真にも偽にもなる複合命題

なお，真理値を考えれば，次が成立することがすぐに分かる。

・恒真命題の否定は恒偽命題

・恒偽命題の否定は恒真命題

・偶然的命題の否定は偶然的命題

2.　真理値分析

複合命題の真理値を調べることを，「真理値分析」という。この分析により，複合命題が恒真・恒偽・偶然的のいずれかであることが分かる。真理値分析には，次のような方法がある。

・真理表

・真理値の代入

・論理式の変形

・真理木

・分析タブロー

3.　真理値分析（真理表）

真理表を作成すれば，恒真・恒偽などが分かる。ただし，命題記号が多くなると，この方法は効率が悪い。例えば，A，B，C，D の 4 つの命題記号からなる論理式の真理表を作成した場合，16（$= 2^4$） 行の表になってしまう。

（例）次の命題の恒真・恒偽を判定せよ。

(1)　$A \to (A \vee B)$

(2)　$\sim(A \to (A \vee B))$

(3)　$\sim A \vee B$

(1)では，命題の真理表は次のようになる。A と B の真理値にかかわらず，$A \to (A \vee B)$ の真理値は常に 1 であるから，これは恒真命題である。

A	B	$A \vee B$	$A \to (A \vee B)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

(2)は(1)の否定命題であるから，恒偽命題である。ただし，念のため真理表を示すと，次の通り。

A	B	$A \vee B$	$A \to (A \vee B)$	$\sim(A \to (A \vee B))$
1	1	1	1	0
1	0	1	1	0
0	1	1	1	0
0	0	0	1	0

(3)は，$\sim A \vee B$ が 1 や 0 になる場合があるので，偶然的命題である。

A	B	$\sim A$	$\sim A \vee B$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

4.　真理関数

論理式は，命題記号の関数と見なすことができる。例えば，2 変数 x，y の関数

$$f(x, y) = x + y$$

を考えてみよう。ここでは，x や y はいろいろな値をとる変数であり，「＋」は算術演算である。そして，$f(x, y)$ は，x の値と y の値に対して，$x + y$ という値を対応させる関数である。

例えば，$x = 1$，$y = 0$ のときは,

$$f(1, 0) = 1 + 0 = 1$$

となる。

一方，論理式 $A \vee B$ を考えてみる。命題の真理値は 1 または 0 であるから， A や B は，「1 と 0 の値をとる変数」と考えることができる。そして， A と B の値（真理値）に対して， $A \vee B$ の値（真理値）が決まるので， $A \vee B$ は，2 変数 $A,\ B$ の関数 $f(A,\ B)$ と見なすことができる。

従って，通常の関数と同様に，

$$f(A,\ B) = A \vee B$$

とおき， $A = 1$， $B = 0$ の場合は，

$$f(1,\ 0) = 1 \vee 0 = 1$$

と計算することができる。

ここで，「$A = 1$ の場合」の意味は，「A の真理値が 1 の場合」という意味である。「$1 \vee 0$」は， $A = 1$， $B = 0$ の場合の $A \vee B$ の真理値の意味である。

以下では， A の真理値が 1 の場合，「A は 1」，「A の値は 1」という表現をする。また，

$$f(A) = \sim A$$

とおけば，

$$f(1) = \sim 1 = 0\,,\quad f(0) = \sim 0 = 1$$

になることも理解できるだろう。

以上のように，論理式は，関数と見なすことができる。一般に，命題 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ から作られる論理式

$$f(A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n)$$

を「真理関数」と呼ぶ。真理関数のとる値は，1 か 0 のみである。真理関数のとる値は，通常の関数の代入計算と同様に計算してよい。

5.　基本的な真理値の演算

真理値の演算については，以下が成立する。 A と B は任意の命題である。

(1)　否定	$\sim 1 = 0$， $\sim 0 = 1$
(2)　連言	$1 \wedge 1 = 1$， $1 \wedge 0 = 0$， $0 \wedge 1 = 0$， $0 \wedge 0 = 0$ $A \wedge 1 = A$， $1 \wedge A = A$， $A \wedge 0 = 0$， $0 \wedge A = 0$
(3)　選言	$1 \vee 1 = 1$， $1 \vee 0 = 1$， $0 \vee 1 = 1$， $0 \vee 0 = 0$ $A \vee 1 = 1$， $1 \vee A = 1$， $A \vee 0 = A$， $0 \vee A = A$
(4)　条件文	$1 \to 1 = 1$， $1 \to 0 = 0$， $0 \to 1 = 1$， $0 \to 0 = 1$ $A \to 1 = 1$， $A \to 0 = \sim A$， $1 \to B = B$， $0 \to B = 1$
(5)　双条件文	$1 \leftrightarrow 1 = 1$， $1 \leftrightarrow 0 = 0$， $0 \leftrightarrow 1 = 0$， $0 \leftrightarrow 0 = 1$ $A \leftrightarrow 1 = A$， $A \leftrightarrow 0 = \sim A$， $1 \leftrightarrow B = B$， $0 \leftrightarrow B = \sim B$

6.　真理値分析（真理値の代入）

この真理値分析は，論理式における命題記号に真理値を直接代入する方法である。命題記号が 1 つまたは 2 つの場合は，この方法が効率的である。

なお，どの真理値分析でも，まず論理式の形をよく見ることが重要である。例えば，論理式

$$(A \vee B) \wedge (\sim C \wedge D)$$

では， C の値が 1 のとき，論理式の値は 0 になることはすぐにわかる。従って，恒真命題でない。

（例）次の命題の恒真・恒偽を判定せよ。

(1)　$A \to (A \vee B)$

(2)　$(A \vee \sim B) \wedge \sim A$

(3)　$\sim(A \to B) \wedge \sim(B \to A)$

与えられた論理式を「与式」と表現する。

(1)　A の値で場合分けして，真理値を計算すればよい。

（イ）$A = 1$のとき，

与式$= 1 \to (1 \vee B) = 1 \to 1 = 1$

（ロ）$A = 0$ のとき

与式 $= 0 \to (0 \vee B) = 1$

（イ）（ロ）より， A と B がどのような真理値をとっても，与式の真理値は常に1になるので，恒真である。

(2)

（イ）$A = 1$のとき，

与式 $= (1 \vee \sim B) \wedge \sim 1 = 1 \wedge 0 = 0$

（ロ）$A = 0$ のとき，

与式 $= (0 \vee \sim B) \wedge \sim 0 = \sim B \wedge 1 = \sim B$

$A = 0$ のとき， B の真理値によって与式は 1 にも 0 にもなるので，命題は偶然的である。

（注）最初に，（ロ）の場合を計算すれば，この場合だけで偶然的であることがわかる。

(3)

（イ）$A = 1$のとき，

与式 $= \sim(1 \to B) \wedge \sim(B \to 1) = \sim B \wedge \sim 1 = \sim B \wedge 0 = 0$

（ロ）$A = 0$ のとき，

与式 $= \sim(0 \to B) \wedge \sim(B \to 0) = \sim 1 \wedge \sim(\sim B) = 0 \wedge B = 0$

（イ）（ロ）より， A と B がどのような真理値をとっても，与式の真理値は常に 0 になるので，恒偽である。

7.　真理値分析（論理式の変形）

いかなる命題 A についても，次が成立する。

$$A \vee \sim A = \text{恒真命題}, \quad A \wedge \sim A = \text{恒偽命題}$$

論理演算に関する法則や，上記のような恒真・恒偽命題を用いて，与えられた論理式の恒真・恒偽を判定することができる。ただし，一般には式変形が面倒になるので，この方法はあまり使用されない。なお，式変形の途中で

$$A \vee \sim A = 1, \quad A \wedge \sim A = 0$$

と表現してよい。右辺の 1 は恒真命題，0 は恒偽命題を表すが，真理値と考えてもよい。

なお，次の変形はよく使用されるので，よく覚えておこう。

$$A \to B = \sim(A \wedge \sim B) = \sim A \vee B$$

（例１）次の命題の恒真・恒偽を判定せよ。

(1)　$A \to (A \vee B)$

(2)　$(A \vee \sim B) \wedge \sim A$

与えられた論理式を「与式」と表現する。

(1)

$$\text{与式} = \sim A \vee (A \vee B) = (\sim A \vee A) \vee B = 1 \vee B = 1$$

よって，恒真命題である。

(2)　分配法則を使用すると，

$$\begin{aligned}\text{与式} &= (A \wedge \sim A) \vee (\sim B \wedge \sim A) = 0 \vee (\sim B \wedge \sim A) = \sim B \wedge \sim A \\ &= \sim(A \vee B)\end{aligned}$$

A, B の真理値によって，与式の真理値は 1 にも 0 にもなるので，偶然的である。